Основы построения нечетких систем

И.А. Ходашинский,

профессор

кафедры автоматизации обработки информации

Томского университета систем управления и радиоэлектроники

hodashn@rambler.ru

Почему?

Вычислительный интеллект

Искусственные нейронные сети

Эволюционные вычисления

Нечеткие системы

Методы роевого интеллекта

Другие метаэвристики

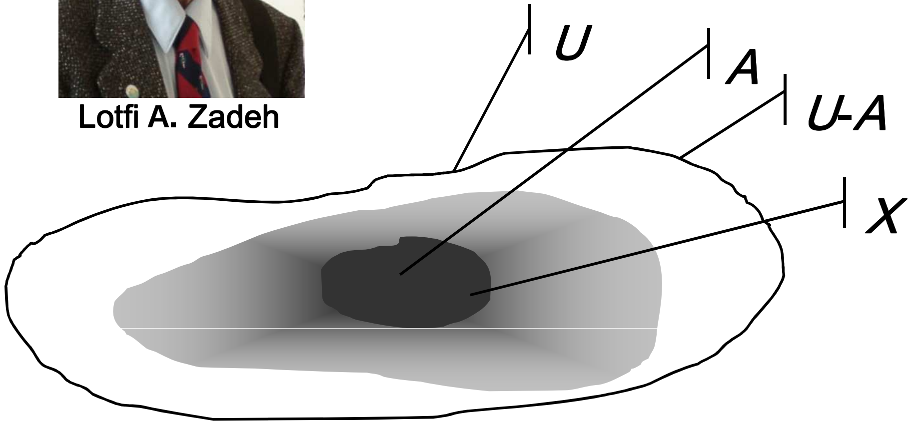
?

Краткий обзор

1. Нечеткие множества и отношения
2. Вывод на нечетких знаниях
3. Типы нечетких систем
4. Нечеткие логические операции
5. Идентификация нечетких систем
6. Области применения нечетких систем

Нечеткие множества

Lotfi A. Zadeh



Чёткое множество A

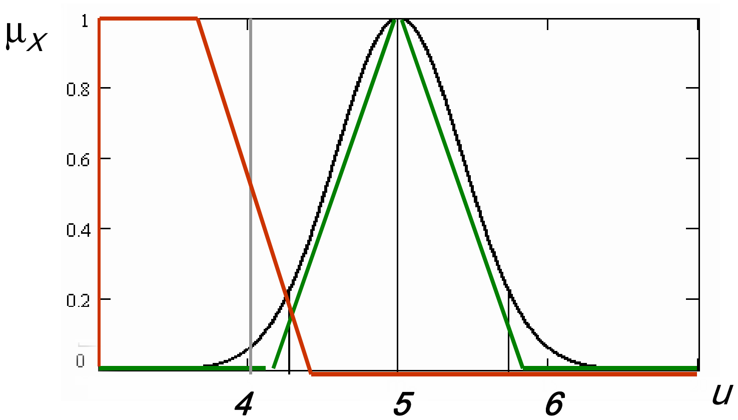
$$A = \{u \mid \mu_A: U \rightarrow \{0,1\},\ u \in U\}$$

Нечёткое множество X

$$X = \{(u, \mu_X(u)) \mid \mu_X: U \rightarrow [0,1],\ u \in U\}$$

$$X = \int_U \mu_X(u)/u$$

X – приблизительно меньше 4 X – около 5



Нечеткие отношения

Нечеткое отношение

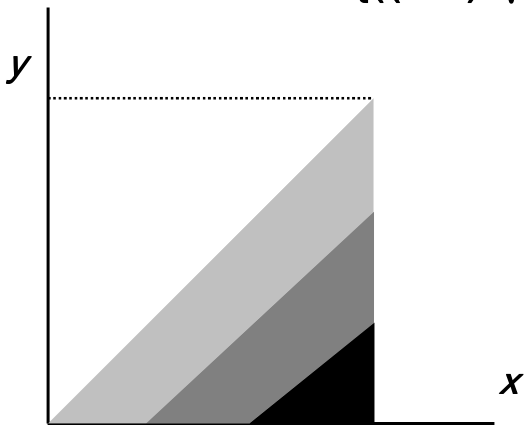
$$R: X \rightarrow Y$$

определяется на подмножестве декартова произведения нечетких множеств $X \times Y \subseteq U \times V$

$$X = \{(u, \mu(u)) \mid \mu_X: U \rightarrow [0,1],\ u \in U\}$$

$$Y = \{(v, \mu(v)) \mid \mu_Y: V \rightarrow [0,1],\ v \in V\}.$$

$$R = \{((u,v), \mu(u,v)) \mid \mu_R: U \times V \rightarrow [0,1],\ (u,v) \in U \times V\}$$



x много больше *y*

$$\text{дружба} = \begin{array}{c|cc|} & \text{Петр} & \text{Дарья} \\ \text{Иван} & 0{,}8 & 0{,}6 \\ \text{Марья} & 0{,}5 & 0{,}1 \end{array}$$

Нечеткие отношения

N-арное нечеткое отношение

$R: X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_N \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N$

$R = \{((u_1, u_2, \ldots, u_N), \mu(u_1, u_2, \ldots, u_N)) \mid \mu_R: U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N \to [0,1],$
$(u_1, u_2, \ldots, u_N) \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N\}.$

Нечеткое отношение R в виде системы

$$R = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2) \cup \ldots \cup (X_N \times Y_N)$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_N \subseteq U,$
$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_N \subseteq V.$

R : ЕСЛИ температура *низкая* ТО скорость вращения *низкая*
ЕСЛИ температура *средняя* ТО скорость вращения *средняя*
ЕСЛИ температура *высокая* ТО скорость вращения *высокая*

Композиция нечетких отношений

Пусть

$$R \subseteq U \times V, \quad S \subseteq V \times W,$$

тогда $Q \subseteq U \times W,$

$$Q = R \circ S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \bigcup_{v_j \in V} (\mu_R(u_i, v_j) \wedge \mu_S(v_j, w_k)) / (u_i, w_k)$$

$\circ$ - свертка sup-min, $\bigcup\limits_{v_j}$ - взятие максимума для всех v_j,

$\wedge$ - взятие минимума.

Возраст $\rightarrow$ богатство

ЕСЛИ *старый* ТО *умный*
ЕСЛИ *умный* ТО *богатый*

Вывод на нечетких знаниях. Модус поненс

Традиционный дедуктивный вывод:

$$P \Rightarrow Q$$
$$P$$

$$Q$$

ЕСЛИ *пасмурно* ТО *будет дождь*
пасмурно

будет дождь

Нечеткий дедуктивный вывод:

$$P \Rightarrow Q$$
$$P`$$

$$Q`$$

ЕСЛИ *умный* ТО *богатый*
не очень умный

?

умный $\subseteq$ **IQ**
богатый $\subseteq [10\,000,\ 1\,000\,000]$

Композиционное правило вывода

Пусть $X \subseteq U$, $R \subseteq U \times V$,

тогда композиционное правило вывода утверждает:

из X и R следует $Y \subseteq V$,

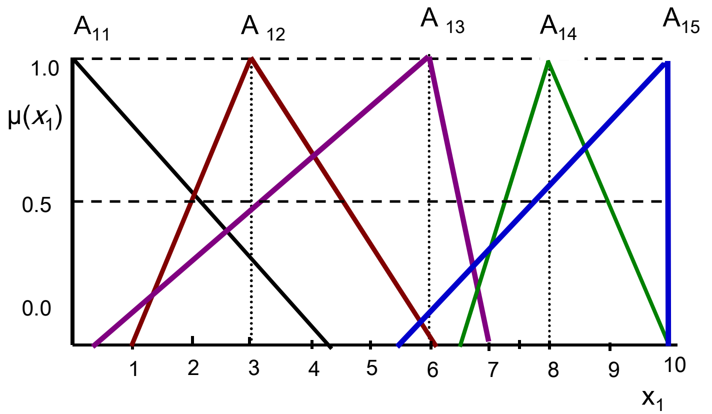
или $X \circ R = Y$.

$R : A \to B$ $\quad \int_U \mu_A(u)/u \quad \int_V \mu_B(v)/v$

$$R_m = (A \times B) \bigcup (\sim A \times V) = \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_b = ((\sim A \times V) \bigcup (U \times B)) \bigcap (A \times V) = \int_{U \times V} (1 - \mu_A(u) \vee \mu_B(v)) \wedge (\mu_A(u))/(u,v)$$

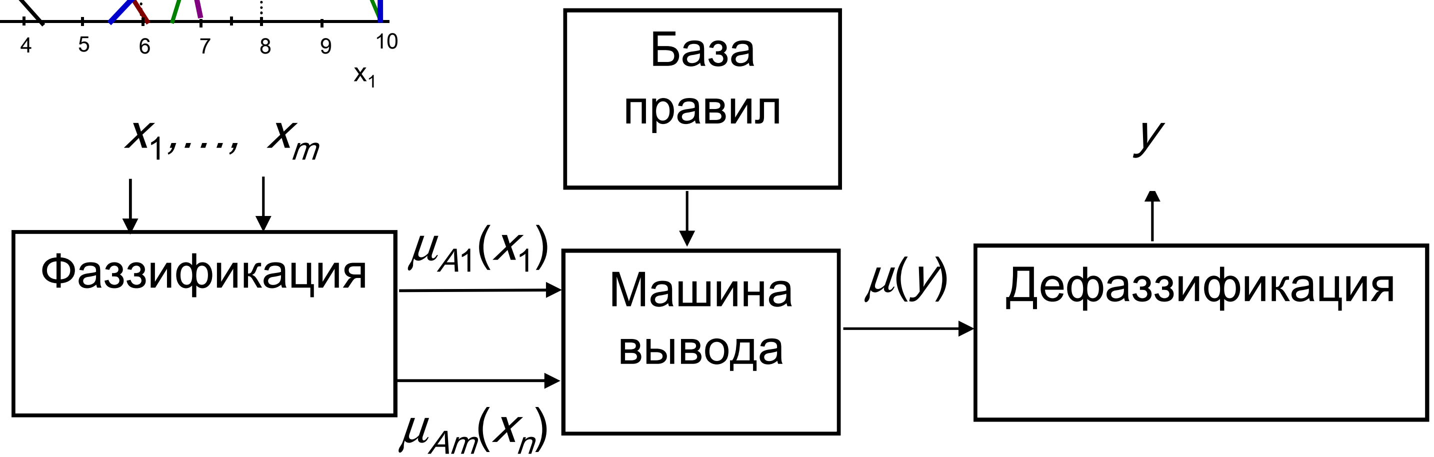
Нечеткая система



Пусть $X \subseteq U,\ R \subseteq U \times V,$

формальная нечеткая система есть

$$X \circ R = Y.$$



Структура неформальной нечеткой системы

База правил

База правил нечеткой системы типа MISO:

R_1: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{11}$ **И** $x_2 = A_{21}$ **И… И** $x_m = A_{m1}$ **ТО** $y = B_1$
R_2: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{12}$ **И** $x_2 = A_{22}$ **И … И** $x_m = A_{m2}$ **ТО** $y = B_2$
……………………………………………………………………….
R_n: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{1n}$ **И** $x_2 = A_{2n}$ **И … И** $x_m = A_{mn}$ **ТО** $y = B_n$

где x_1, x_2, …, x_m – входные переменные;
y – выходная переменная;
A_{ij} – нечеткие области определения входных переменных, заданные на универсальных множествах X_1, X_2, …, X_m;
B_s – значение выходной переменной.

Типы нечетких систем. Синглтон

R_i: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{1i}$ **И** $x_2 = A_{2i}$ **И** … **И** $x_m = A_{mi}$ **ТО** $y = a_i$

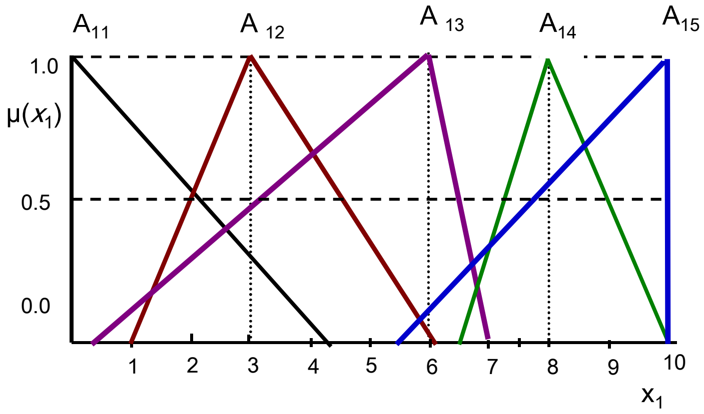
где a_i – действительное число.

Модель типа синглтон осуществляет отображение $F: \Re^m \to \Re$,

Отображение F определяется формулой:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_{A1i}(x_1)\cdot \mu_{A2i}(x_2)\cdot \ldots \cdot \mu_{Ami}(x_m)\cdot a_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{A1i}(x_1)\cdot \mu_{A2i}(x_2)\cdot \ldots \cdot \mu_{Ami}(x_m)}$$

$$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_m]^T \in \Re^m$$



Типы нечетких систем. Такаги-Сугено

T. Takagi

M. Sugeno

R_i: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{1i}$ **И** $x_2 = A_{2i}$ **И**… **И** $x_m = A_{mi}$ **ТО** $y = f_i(x_1,\ldots,x_m)$

где $f_i(x_1,\ldots,x_m)$ – линейная функция .
Отображение F определяется формулой:

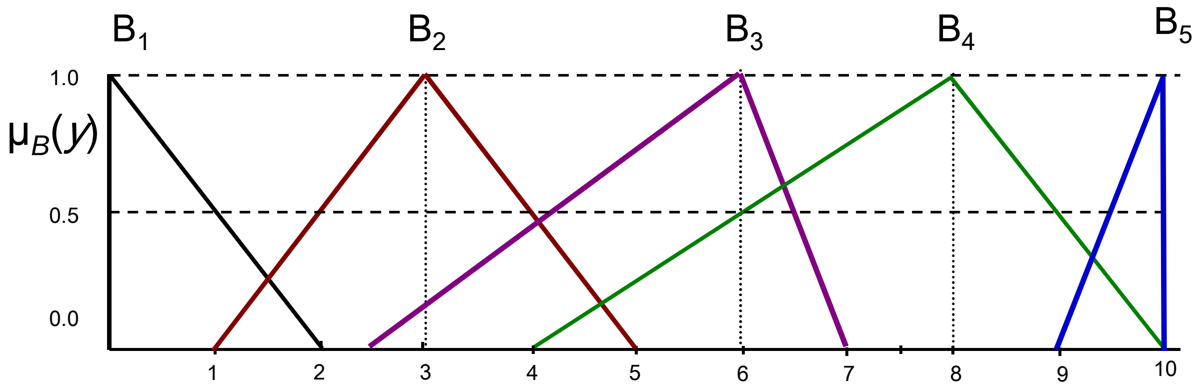
$$F(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_{A1i}(x_1)\cdot \mu_{A2i}(x_2)\cdot \ldots \cdot \mu_{Ami}(x_m)\cdot (a_{0i} + a_{1i}x_1 + \ldots + a_{mi}x_m)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{A1i}(x_1)\cdot \mu_{A2i}(x_2)\cdot \ldots \cdot \mu_{Ami}(x_m)}$$

Типы нечетких систем. Мамдани

Ebrahim Mamdani

R_i: **ЕСЛИ** $x_1 = A_{1i}$ **И** $x_2 = A_{2i}$ **И**… **И** $x_m = A_{mi}$ **ТО** $y = B_i$

где B_i – терм выходной лингвистической переменной.



Нечеткие логические операции. Отрицание

Операция отрицания удовлетворяет следующим свойствам:

$$c:[0,1] \to [0,1],$$

$$c(0)=1,\ c(1)=0,\ c(c(a))=a,$$

$$\forall a_1,a_2((a_1,a_2 \in [0,1]) \wedge ((a_1 < a_2) \to (c(a_1) > c(a_2)))).$$

Нечеткое отрицание по Заде

$$c(a) = 1-a, \qquad \forall a \in [0,1].$$

по Сугено $$c(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \text{ где } \lambda > -1;$$

по Ягеру $$c(a) = \sqrt[p]{1-a^p};$$

Ronald R. Yager

Конъюнкция, дизъюнкция. Т-нормы

Функция $T_n:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ называется t-нормой на интервале [0,1], а функция $S_n:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ называется t-конормой, если они обладают свойствами коммутативности, ассоциативности, монотонности, для них выполнены граничные условия, операторы T и S являются двойственными по отношению друг к другу:

$$T^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 - S^n((1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_n)),$$

$$S^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 - T^n((1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_n)),$$

при условии, что операция отрицания задается как $c(a)=1-a$.

Примеры Т-норм

Функции Заде.

$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\quad S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Вероятностные функции. $T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$,

$$S(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} a_i a_j a_k \pm \ldots \pm \prod_{i=1}^{n} a_i \right)$$

Функции Лукасевича.

$$T(a_1, \ldots, a_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1), 0 \right) \quad S(a_1, \ldots, a_n) = \min\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, 1 \right)$$

Функции Швайцера и Скляра

$$S(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} a_i^p a_j^p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} a_i^p a_j^p a_k^p \pm \ldots \pm \prod_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p}$$

$$T(a_1, \ldots, a_n) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} (1-a_i)^p - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (1-a_i)^p (1-a_j)^p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} (1-a_i)^p (1-a_j)^p (1-a_k)^p \pm \ldots \pm \prod_{i=1}^{n} (1-a_i)^p \right)^{1/p}$$

Импликация

Формальнологическое определение импликации через дизъюнкцию :

$$I(a_1, a_2) = S(1 - a_1, a_2).$$

Функция I :[0,1]×[0,1] → [0,1] является функцией импликации, если она удовлетворяет следующим двум условиям :

$$I(0,0)= I(0,1)= I(1,1)=1; \qquad I(1,0)=0.$$

Импликация на функциях Заде $I(a_1, a_2) = \max(1 - a_1, a_2)$.

Импликация на вероятностных функциях $I(a_1, a_2) = 1 - a_1 + a_2 * a_1$.

Импликация Лукасевича $I(a_1, a_2) = \min(1 - a_1 + a_2, 1)$.

Импликации Т-типа

Импликация по Мамдани $I(a_1, a_2) = \min(a_1, a_2)$.

Импликация по Ларсену $I(a_1, a_2) = a_2 * a_1$.

Вывод в нечетких системах типа Мамдани

R_i: ЕСЛИ $x_1 = A_{1i}$ И $x_2 = A_{2i}$ И … И $x_m = A_{mi}$ ТО $y = B_i$

В операторной форме
$R_j(x_1,\ldots, x_m, y) = I(T(A_{1j}(x_1),\ldots, A_{mj}(x_m)), B_j(y))$.

Последовательно выполним следующие операции:
конъюнкцию, импликацию, агрегацию (объединение всех правил).

Получим отношение $R : A \to B$,

При поступлении на вход системы нечеткого входного значения D нечеткое выходное значение F:

$$F(y) = D(x_1,\ldots, x_m) \circ R(x_1,\ldots,x_m, y).$$

Вывод в нечетких системах типа Мамдани

Формально-логический метод:

$R_{KL}(x_1,\ldots,x_m, y) =$

$T^{`}(R_1^s(x_1,\ldots,x_m, y), R_2^s(x_1,\ldots,x_m, y), \ldots, R_n^s(x_1,\ldots, x_m, y))=$

$T^{`}(S^{`}(S(1\text{-}A_{11}(x_1),\ldots,1\text{-} A_{m1}(x_m)), B_1(y)), \ldots,$

$S^{`}(S(1\text{-}A_{1n}(x_1),1\text{-}A_{mn}(x_m)), B_n(y))).$

Аппроксимации Мамдани:

$R_M(x_1,\ldots,x_m, y) =$

$S^{`}(R_1^t(x_1,\ldots,x_m, y), R_2^t(x_1,\ldots,x_m, y),\ldots,R_n^t(x_1,\ldots,x_m, y))=$

$S^{`}(T^{`}(T(A_{11}(x_1),\ldots, A_{m1}(x_m)), B_1(y)), \ldots,$

$T^{`}(T(A_{1n}(x_1),\ldots, A_{m1}(x_m)), B_n(y))).$

Дефаззификация

Дефаззификация — способ преобразования нечеткой величины $F(y) \subseteq [a_-, a_+]$ в четкое представление или четкую величину.

Нахождение центра масс (тяжести):

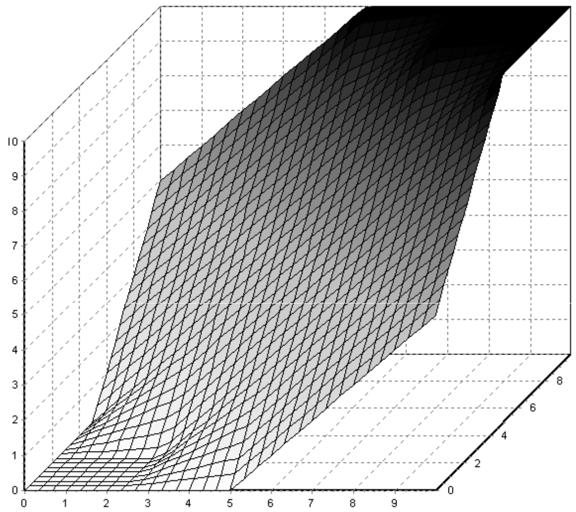
$$y_F^c = \frac{\int_{a_-}^{a_+} y\mu_F(y)dy}{\int_{a_-}^{a_+} \mu_F(y)dy}$$

Нахождение медианы:

$$\int_{a_-}^{y_F^m} \mu_F(y)dy = \int_{y_F^m}^{a_+} \mu_F(y)dy$$

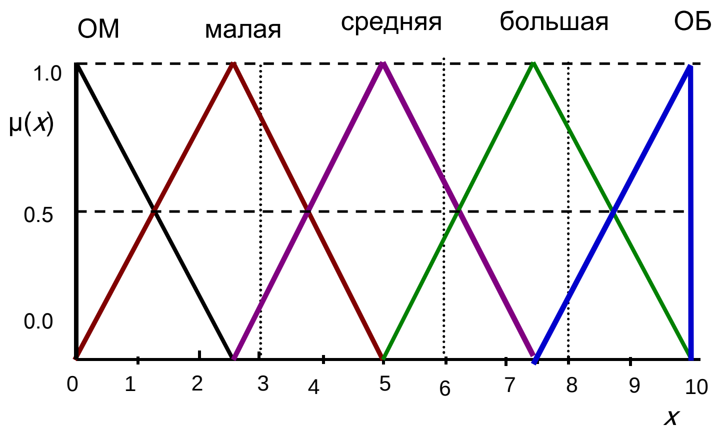
Исследование вывода в системе Мамдани

Таблица наблюдений



Функции принадлежности

входа и выхода



25 правил в базе

ЕСЛИ x - малая
И y - средняя
ТО z – малая
ЕСЛИ x - средняя
И y - средняя
ТО z – средняя
ЕСЛИ x - малая
И y - большая
ТО z - средняя

Изменяемые параметры:

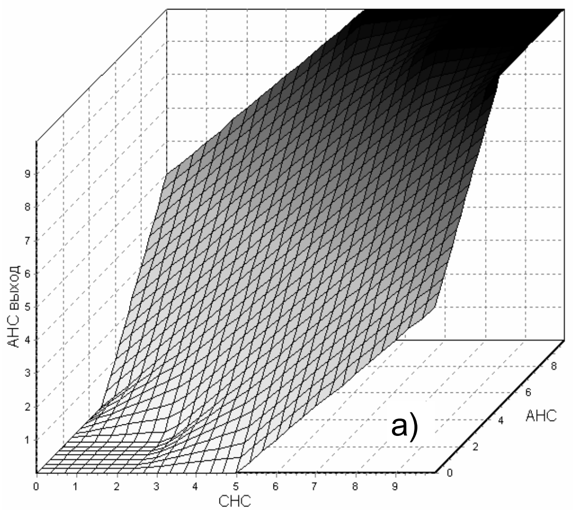
***t*-нормы, *t*-конормы**

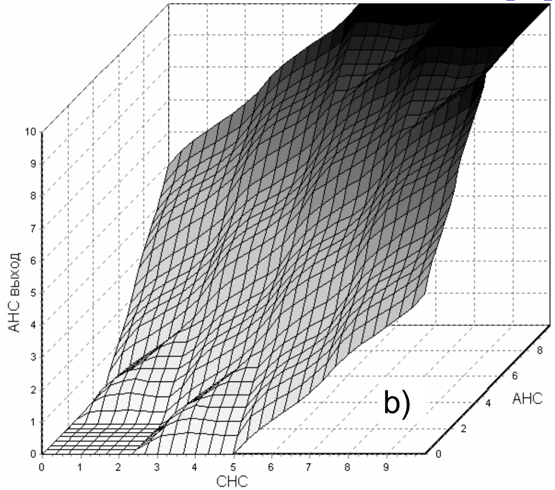
тип вывода

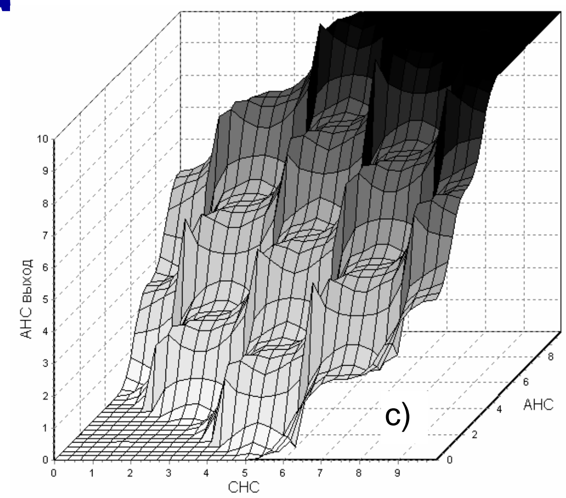
Результаты вывода

Способ вывода	*t*-норма	*t*-конорма	СКО
Формально логический	Заде	Заде	0,140322
	вероятностные	вероятностные	0,119871
	Лукасевича	Лукасевича	0,100539
	ШС- 0,0075	ШС-любой *p*	0,038711
	Лукасевича	ШС-любой *p*	2,72403E-06
	Лукасевича	вероятностные	2,59846E-06
Аппроксимация Мамдани	Заде	Заде	0,010386
	вероятностные	вероятностные	0,001240
	Лукасевича	Лукасевича	0,033083
	ШС-0,83	ШС-0,83	0,000363
	ШС- 1,0	Лукасевича	2,59846E-06

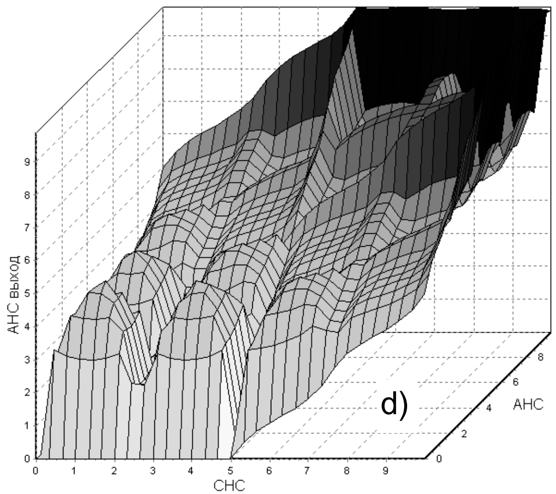
Поверхности вывода







a) Идеальная. Швайцера-Скляра p=0.83, АМ.
b) Заде, АМ.
c) Лукасевича, АМ.
d) Лукасевича, ФЛМ.
e) Вероятностные, ФЛМ.



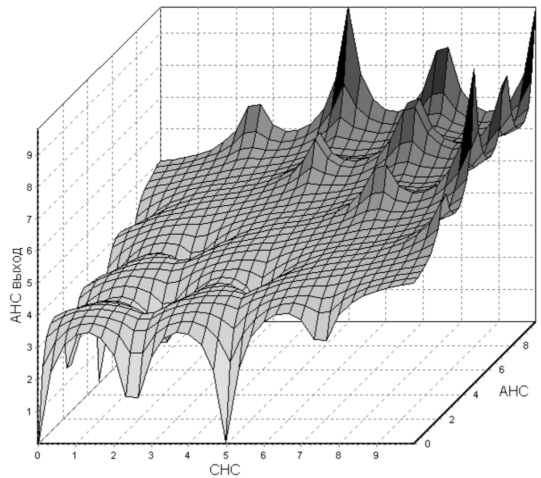


Схема идентификации

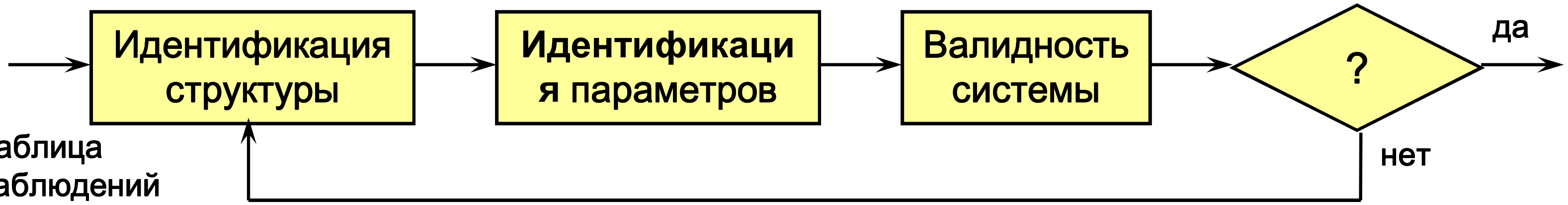


Таблица наблюдений

x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$f(\mathbf{x}_1)$
x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$f(\mathbf{x}_2)$
…	…	…	…	…
x_{N1}	x_{N2}	…	x_{Nn}	$f(\mathbf{x}_N)$

Критерий – ошибка вывода ε

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\left| f(\boldsymbol{x}_i) - F(\boldsymbol{x}_i)\right|}{N} \qquad \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(f(\boldsymbol{x}_i) - F(\boldsymbol{x}_i))^2}}{N}$$

$$\max_i \left| f(\boldsymbol{x}_i) - F(\boldsymbol{x}_i)\right|$$

Результат идентификации

Треугольная ФП, два входа, пять термов для одного входа

Ошибка	a_{11}	b_{11}	c_{11}	a_{12}	b_{12}	c_{12}	…	a_{24}	b_{24}	c_{24}	a_{25}	b_{25}	c_{25}	r_1	…	r_{25}

антецедент

консеквент

Гауссова ФП, два входа, пять термов для одного входа

Ошибка	b_{11}	σ_{11}	b_{12}	σ_{12}	…	b_{24}	σ_{24}	b_{25}	σ_{25}	r_1	…	r_{25}

антецедент

консеквент

Методы идентификации

Идентификация структуры

Кластерный анализ

Деревья решений

Метод перебора

Идентификация параметров

Методы, основанные на производных

- метод градиентного спуска;
- фильтр Калмана;
- метод наименьших квадратов;
- алгоритм Левенберга-Марквардта.

Метаэвристические методы

- эволюционные алгоритмы;
- алгоритмы муравьиной колонии;
- алгоритм пчелиной колонии;
- метод роящихся частиц;
- алгоритм имитации отжига;
- алгоритмы локального поиска.

Гибридные методы

Решаемые проблемы

Bart Kosko

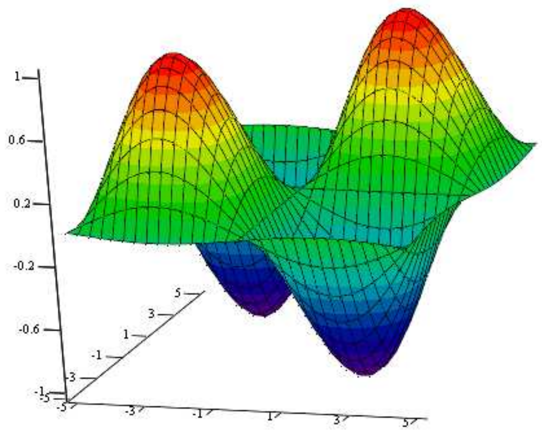
Тип системы	Основное назначение	Критерий оценки
Синглтон	**аппроксимация**	точность
Такаги-Сугено	**аппроксимация**	точность
Мамдани	**извлечение знаний**	интерпретируемость

Классификация
Кластеризация

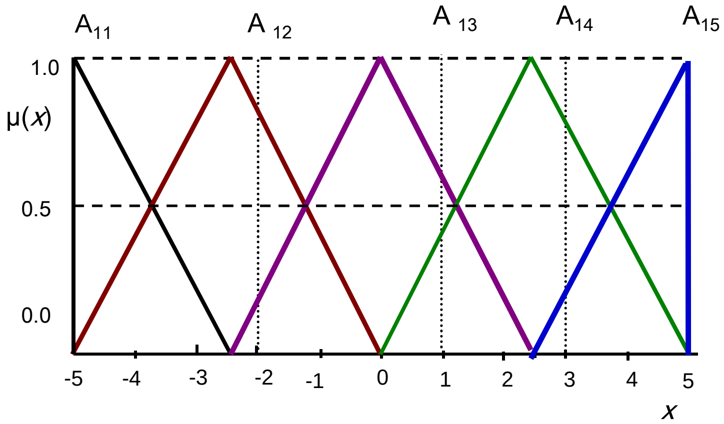
R_i: ЕСЛИ $x_1 = A_{1i}$ И $x_2 = A_{2i}$ И … И $x_m = A_{mi}$ ТО class = c_k, $CF = 0.8$

Аппроксимация

$$f(x, y) = \sin(2x/\pi)\sin(2y/\pi)$$



F1



Ошибки

Средняя абсол. ошибка 5,66220910661148 E-11

Средняя квадрат. ошибка 7,61715273788389 E-12

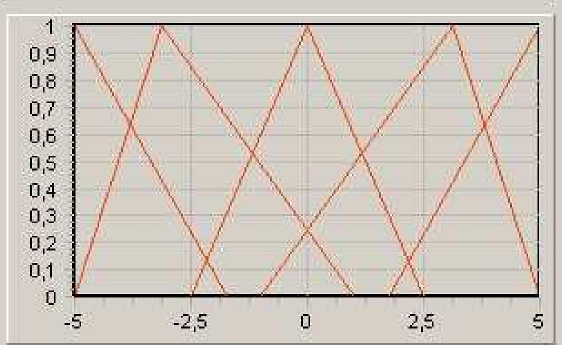
Максимальная ошибка 1,9642776294404E E-10

Сгенерировать таблицу наблюдений

Сгенерировать базу правил

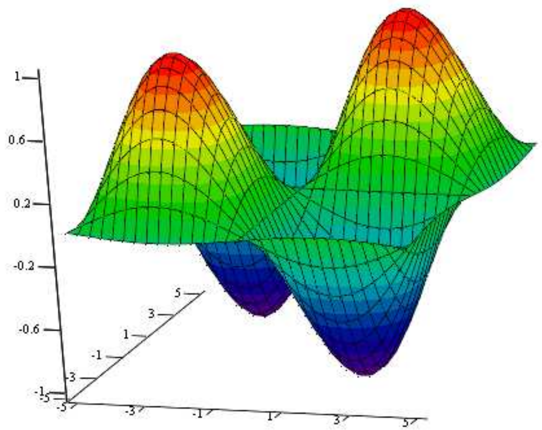
	ФП	1	2	3
▶	1	-5	-5	-1,7400158
	2	-4,9999999	-3,1401085	0,99999999
	3	-2,5165563	-0,0017239	2,52011632
	4	-0,9999999	3,14092612	4,99999999
	5	1,74485377	5	5
*				

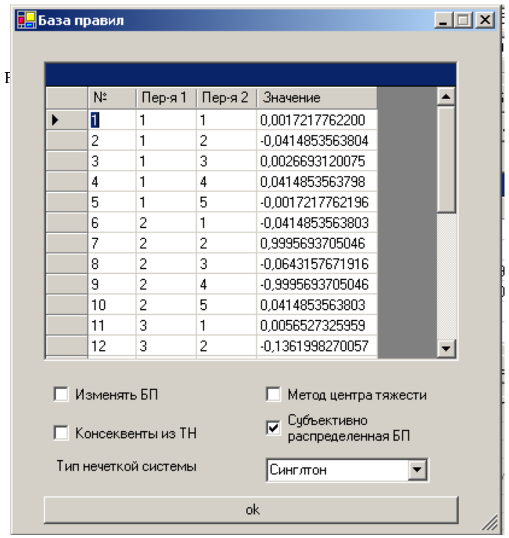
Изменить тип выделенных ФП



Градиентный метод

кации





Число термов	Итерации	СКО	Время обучения
3	1000	0,020527	11
4	500	5,804E-05	11
	1000	8,878E-06	22
	2000	7,059E-06	46
	5000	3,762E-06	110
	10000	1,318E-06	233
5	500	2,208E-10	18
	1000	2,278E-12	36
	5000	2,278E-12	179
6	1000	0,000239	55
	5000	0,000239	267
7	100	3,011E-10	9
	500	2,278E-12	47
	1000	2,278E-12	89

Техническое применение

- Управление котельными установками электростанций, Assilian,1974.
- САУ карусельной печью в производстве цемента, Mamdani 1977.
- Система управления поездами метрополитена в г. Сендай, Hitachi.
- Система стабилизации изображения видеокамеры.
- Автоматическая стиральная машина.
- Микроволновые печи, Sanyo.
- Автоматические коробки передач, Nissan.

Нетехническое применение

- ✓ Система управления электронным кардиостимулятором (Akaiwa 1990; Kitamura 1991; Sugiura 1991).
- ✓ Система контроля кровяного давления (Arita 1990).
- ✓ Диагностика опухолей (Arita 1991).
- ✓ Диагностика текущего состояния сердечно-сосудистой системы (Altrock 1993).
- ✓ Обработка изображений (Fijiwara 1991; Franke 1994).
- ✓ Распознавание слов (Fujimoto 1989).
- ✓ Лечение диабета и контроль уровня сахара в крови (Jacoby 1994; Kageyama1990).
- ✓ Отопительные приборы (Heider 1994).

СПАСИБО

hodashn@rambler.ru