

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Цой Ю.Р., кафедра ВТ, Томский
Политехнический Университет

Аннотация

В работе рассматривается использование генетического алгоритма для решения задач оптимизации унимодальных, многоэкстремальных функций и функций с нелинейной невыпуклой областью ограничений.

Введение

Бурное развитие вычислительной техники в 20 веке привело к тому, что значительная часть вычислительных работ была возложена на ЭВМ. Благодаря большой скорости расчетов, их низкой стоимости и достаточной для многих прикладных задач точности, появилась возможность использовать “тяжелые” с точки зрения вычислений и временных затрат методы решения математических задач. В качестве примеров можно привести переборные методы, итерационные, методы, использующие большие объемы данных (статистические). Однако, наряду с созданными ранее способами решения и алгоритмами стали появляться новые, существование которых отдалено от ЭВМ трудно представить.

Данный доклад рассматривает один из таких методов: генетические алгоритмы (ГА). В их основе лежит идея использовать аналоги эволюционных механизмов для поиска решения. Как известно, основными концепциями теории эволюции являются наследственность и естественный отбор. Эти же механизмы используются генетическим алгоритмом для нахождения решения.

Работу ГА можно описать следующим образом. В самом начале случайным образом инициализируется популяция, которая имеет такие характеристики, как численность, количество генов у каждой особи и их разрядность. Особи популяции оцениваются в соответствии с выбранным критерием, и в результате оценки определяется их приспособленность. В качестве критерия выступает некоторая функция $F(g_1, g_2, \dots, g_n)$, где g_i – i -й ген оцениваемой особи. Чем выше приспособленность особи, тем больше вероятность того, что она примет участие в скрещивании. При скрещивании двух особей происходит “обмен генетической информацией”, т.е. соответствующие гены обмениваются битами. Данная операция называется кроссовером. Полученные в результате скрещивания потомки формируют новое поколение взамен предыдущему, и все повторяется сначала, но уже для только что созданного поколения. Алгоритм прекращает работу в одном из следующих случаев:

- найдено решение;

- истекло установленное время работы;
- популяция длительное время не прогрессирует.

После окончания работы наиболее приспособленная особь популяции, точнее её гены, будет представлять решение задачи, найденное ГА. Механизмы, заложенные в основу ГА, не могут гарантировать нахождение наилучшего решения, однако, они с большой вероятностью дают одно из оптимальных решений.

Основной областью использования ГА является оптимизация многоэкстремальных функций.

Постановка задачи

Упрощенно экстремальную задачу можно представить следующим образом: необходимо найти глобальный минимум (максимум) функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что задана область определения переменных X и дополнительная область ограничений G .

Т.к. существует набор функций, используемый многими разработчиками ГА для тестирования, то возьмем из него несколько функций для демонстрации возможностей ГА.

1) $F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, x \in (-5, 12; 5, 12), n=30;$

$\text{Min}(F(x)) = 0;$

Локальных минимумов нет

2) Функция Растригина

$F(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)),$

$x \in (-5, 12; 5, 12), n=20;$

$\text{Min}(F(x)) = 0$

Множество локальных минимумов

3) Функция Растригина

$F(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)),$

$x \in (-5, 12; 5, 12), n=50;$

$\text{Min}(F(x)) = 0$

Множество локальных минимумов

4) $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$

Ограничения:

$g_1(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 - 1 < 0,$ или

$g_2(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 - 4 < 0,$ или

$g_3(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 < 0,$

$\text{Max}(F(x_1, x_2)) = 11,4142.$

Целью первых трех задач является отыскание минимума функции. В четвертой задаче необходимо найти максимум функции на нелинейной невыпуклой области. Для “попадания” в область ограничений достаточно выполнения любого из поставленных условий.

При решении задачи №4 её условие было преобразовано с помощью метода штрафных функций. Суть метода заключается в том, что в случае выхода переменной за пределы ограничений, значение целевой функция увеличивается (штрафуется) на пропорциональное нарушению значение. В

результате исходная задача преобразуется к задаче безусловного поиска максимума функции.

Условимся использовать точность поиска 0,001, т.е. если найденный экстремум будет отличаться от глобального менее, чем на 0,001, то будем считать разницу незначительной.

Результаты работы ГА

Для решения каждой задачи использовался ГА с различными параметрами. Для сбора информации о работе алгоритма было произведено 50 запусков для каждой задачи.

В табл.1 приведены основные параметры использованных алгоритмов.

Табл.1. Характеристики ГА

№ задачи	Размер популяции	Макс. число поколений	Разрядность генов
1	50	100	10
2	100	50	15
3	100	100	16
3	50	25	13

Табл. 2 содержит объемы пространства поиска для каждой задачи и число точек, исследованных с помощью ГА. По сложившейся традиции эффективность ГА принято оценивать тем, сколько раз вычисляется целевая функция. В данном случае аналогом этой характеристики выступает число исследованных точек, т.к. для каждой точки вычисляется значение целевой функции.

Табл.2.

№ задачи	Размер пр-ва поиска	Число исследованных точек
1	2^{300}	5000
2	2^{300}	5000
3	2^{800}	10000
4	2^{26}	1250

Результаты, полученные при решении задачи №1 приведены в табл. 3. $F_{\min}(x)$ – минимальное значение оптимизируемой функции; $F_{\max}(x)$ – максимальное полученное значение; N – число случаев, когда был найден глобальный минимум (в скобках приведен процент относительно общего числа запусков).

Табл.3. Результаты решения задачи №1

$F_{\min}(x)$	$F_{\max}(x)$	N
0	0,1436	21 (42%)

Решение задачи №2. Полученные в результате работы ГА данные содержатся в табл.4. Обозначения совпадают с обозначениями в табл.3.

Табл.4. Результаты решения задачи №2

$F_{\min}(x)$	$F_{\max}(x)$	N
0	19,8992	8 (16%)

Результаты решения задачи №3 отображены в табл. 5. Несмотря на то, что 3-я задача гораздо сложнее задачи №2, исследовав всего в два раза большее количество точек, ГА дает более хороший результат: глобальный минимум находится чаще. Возможно, дело в рельефе функции Растри-

гина от 20 переменных, с которым данный генетический алгоритм справляется хуже, чем с рельефом функции 50 переменных.

Табл.5. Результаты решения задачи №3

$F_{\min}(x)$	$F_{\max}(x)$	N
0	49,869	19 (38%)

Перейдем к решению задачи №4. Полученные результаты можно частично объяснить введением области ограничений, т.к. она затрудняет поиск вблизи экстремума. Результаты приведены в табл.5. В скобках указана разница между $F(x)$ и глобальным максимумом (11,4142).

Табл.6. Результаты решения задачи №4

$F_{\min}(x)$	$F_{\max}(x)$	N
11,375 (0,0392)	11,414 (0,0002)	1 (2%)

Результаты работы ГА показали его пригодность при решении задач условной и безусловной оптимизации как на относительно простых одноэкстремальных функциях (задача №1), так и на сложных функциях (задача №2 и №3).

Заключение

Сама по себе идея эволюционного программирования, и ГА в частности, использовать механизмы эволюции для нахождения решений, очень интересна. Выгодным свойством ГА является в первую очередь то, что для его реализации не требуется громоздких вычислений. Сложность алгоритма в первую очередь обусловлена видом целевой функции и характером имеющихся ограничений на область поиска. Также ГА способен эффективно сужать область поиска, а в работе Исаева [2] показано, что с помощью ГА можно исследовать рельеф функции.

Основным недостатком, связанным с изучением и распространенностью ГА, является отсутствие серьезной информации о них на русском языке, в то время как за рубежом эволюционные вычисления пользуются популярностью, не только из-за своей необычности, но и из-за эффективности.

Список литературы

1. Корнеев В.В., Гареев А.Ф., Васютин С.В., Райх В.В. Базы данных. Интеллектуальная обработка информации. – М.: "Нолидж", 2000. – 352с.
2. Д.И. Батищев, С.А. Исаев. Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью генетических алгоритмов./Межвузовский сборник научных трудов "Высокие технологии в технике, науке и образовании", Воронеж, ВГТУ, 1997г., стр. 4-17.
3. Д.И. Батищев, С.А. Исаев, Е.К. Ремер, Эволюционно-генетический подход к решению задач невыпуклой оптимизации./Межвузовский сборник научных трудов "Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах", Воронеж, ВГТУ, 1998г., стр.20-28.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. – 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 264 с.