

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Цой Ю.Р., кафедра ВТ, Томский Политехнический Университет

Аннотация

В данном докладе рассматривается решение некоторых экономических задач с использованием механизма эволюционных вычислений. Для примера были взяты задача о рационе и транспортная задача. Демонстрируются возможности ГА при решении задач оптимизации.

Введение

За последние десятилетия все больше внимания уделяется природным механизмам и закономерностям. Многие из задач математики и механики, которые стоят перед современными исследователями можно решить по аналогии с тем, как это сделано в природе. В качестве примера можно привести искусственные нейронные сети и эволюционные вычисления. Одним из разделов эволюционных вычислений являются генетические алгоритмы, которые используют эволюционные принципы для нахождения решения некоторой задачи.

Для работы ГА используют виртуальную популяцию, где гены каждой отдельной особи являются частным решением поставленной задачи. В результате оценивания популяции каждой особи ставится в соответствие некоторая величина, которая называется приспособленностью и показывает, насколько успешно *данная* особь решает *данную* задачу, т.е. насколько её гены соответствуют поставленным условиям. Более приспособленные особи скрещиваются, из их потомков формируется новая популяция, члены которой оцениваются, затем скрещиваются и т.д. В ходе скрещивания двух особей происходит обмен генетической информацией, и получившиеся потомки обладают как свойствами первого родителя, так и свойствами второго.

В результате работы ГА получается популяция, которая содержит особь, гены которой лучше генов других особей соответствуют требуемым условиям. Данная особь и будет являться найденным с помощью ГА решением.

Следует отметить, что найденное решение может и не быть наилучшим, однако оно может быть одним из множества оптимальных решений. Отличительной особенностью ГА является то, что вычислительная сложность алгоритма мало зависит от сложности задачи. Значение имеют: вид целевой функции, количество параметров и область ограничений, если они имеются. Важными характеристиками ГА являются: численность популяции, количество поколений и разрядность гена.

Применять ГА можно везде, где требуется оптимизация целевой функции, в частности, для решения задач линейного программирования. При этом система ограничений задачи заменяется набором штрафных функций[2]. Таким образом, задача минимизации исходной целевой функции $F(x)$ с заданными ограничениями заменяется задачей о безусловной минимизации функции [2, 4]

$$\varphi(x) = F(x) + \sum g_i(x),$$

где $g_i(x)$ – набор штрафных функций, таких, что если X – область ограничений, то

$$g_i(x) = 0, \text{ при } x \in X$$

$$g_i(x) > 0, \text{ при } x \notin X$$

Т.е.,

$$\min(F(x)) = \min(\varphi(x)) \text{ при } x \in X.$$

Постановка задачи

В качестве тестовых задач были взяты следующие две задачи, принадлежащие классу “классических” задач линейного программирования [3].

Задача о рационе: Для увеличения содержания витаминов в питании детей для детского сада решено закупить на рынке не менее 25 кг яблок, апельсинов и персиков. Суммарная потребность в витамине А составляет не менее 90 мг, в витамине С – не менее 70 мг. Содержание витаминов в 1 кг и цена 1 кг соответствующих фруктов приведено в табл.1.

Табл.1

	Яблоки	Апельсины	Персики
Вит. А, мг/кг	1	6	20
Вит. С, мг/кг	3	3	1
Цена 1 кг, руб.	8	9	13

Сколько фруктов следует закупить, чтобы суммарная стоимость покупки была минимальной?

Транспортная задача:

Однородный груз сосредоточен у трех поставщиков в объемах 200, 300 и 500 единиц. Данный груз необходимо доставить трем потребителям в объемах 500, 400 и 300 единиц. Стоимости перевозки от каждого поставщика каждому потребителю приведены в табл.2. Объем перевозки груза от первого поставщика второму потребителю должен быть не менее 100 единиц, а от третьего первому не более 200 единиц. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы поставщиков будут вывезены полностью, а суммарные затраты на перевозку – минимальными.

Табл.2

	500	400	300
200	1	5	6
300	2	6	7
500	3	7	8

1-й столбец показывает запасы поставщиков, первая строка – потребность потребителей в това

ре. На пересечении i -й строки и j -го столбца находятся стоимости перевозки одной единицы товара от i -го поставщика j -му потребителю.

Решение задачи о рационе с помощью ГА

Математическая модель задачи имеет следующий вид [3]:

$$F(x) = 8x_1 + 9x_2 + 13x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 20x_3 \geq 90, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 70, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 25, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0; \end{cases}$$

Оптимальным решением задачи, полученным с помощью симплекс метода, является значение функции $F(x)^* = 213$ [3]. Результат работы ГА по 50 запускам приведен в табл.3. Размер популяции равнялся 50 особям, поиск велся на протяжении 50 поколений, разрядность каждого гена равна 11 бит.

Табл.3

$F_{\min}(x)$	213.10
$F_{\max}(x)$	219.49

Размер области поиска при решении данной задачи составил 2^{33} точек. Во время решения задачи, при каждом запуске было исследовано не более 2500 точек пространства, что составляет около $3 \cdot 10^{-5}$ % всего пространства поиска. Полученные решения близки к оптимальному. Таким образом, учитывая, что генетический алгоритм в большинстве случаев необходим, чтобы получить не идеальное, а просто “хорошее” решение, можно сказать, что со своей задачей он справился.

Решение транспортной задачи

Математическая модель задачи [3]:

$$F(x) = x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 6x_{15} + 7x_{16} + 3x_{17} + 7x_{18} + 8x_{19}$$

$$F(x) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 200, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 300, \\ x_7 + x_8 + x_9 = 500, \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 500, \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 400, \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 300, \\ x_2 \geq 100, \\ x_7 \leq 200, \\ x_i \geq 0, i=1 \dots 9; \end{cases}$$

Оптимальным значением целевой функции является значение равное 4400. Данное решение получено методом потенциалов [3].

Результаты работы генетического алгоритма по 50 запускам представлены в табл.4. Используемый ГА имеет следующие характеристики: размер популяции 500 особей, число поколений поиска решения 500, разрядность каждого гена 9 бит.

Табл.4

$F_{\min}(x)$	4435
$F_{\max}(x)$	5329

Решение данной задачи находится в 9-мерном пространстве, размер которого составляет 2^9 точек. Во время работы алгоритмом было рассмотрено не более 250000 возможных решений ($1,034 \cdot 10^{-17}$ %). При исследовании большего пространства (порядка 10^6 точек) было найдено оптимальное значение параметров, при котором $F(x) = 4400$, причем полученное решение существенно отличалось от решения задачи методом потенциалов и удовлетворяло всем поставленным требованиям.

Заключение

На примере двух несложных задач были показаны возможности генетического алгоритма по исследованию области поиска для отыскания решения поставленной задачи. Исследуя всего лишь небольшую часть пространства поиска, генетический алгоритм позволяет получить приемлемое решение за конечное время и в этом его несомненное преимущество перед переборными методами. По возможности поиска ГА значительно превосходят градиентные методы, эффективность которых существенно падает при решении задач оптимизации функций со сложным рельефом.

Список литературы

1. Корнеев В.В., Гареев А.Ф., Васютин С.В., Райх В.В. Базы данных. Интеллектуальная обработка информации. – М.: “Нолидж”, 2000. – 352с.
2. Д.И. Батищев, С.А. Исаев. Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью генетических алгоритмов. /Межвузовский сборник научных трудов “Высокие технологии в технике, науке и образовании”, Воронеж, ВГТУ, 1997г., стр. 4-17.
3. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001 – 656с. – (Серия “Высшее образование”).
4. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. – 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 264 с.